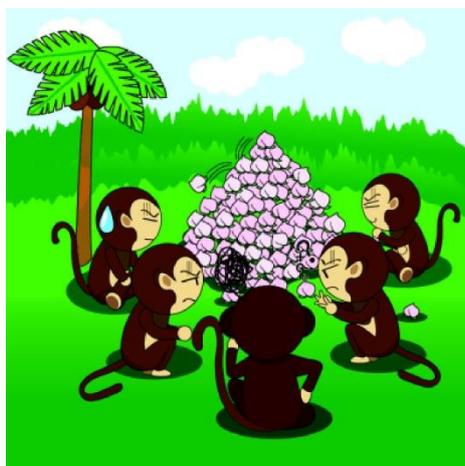


55 李政道的五猴分桃問題…遞迴數列知多少

在 1979 年春，美籍物理學家李政道博士在訪問中國科學技術大學時，給少年班的學生提出了一個有趣的“五猴分桃”的問題。據說，當時中國科學技術大學少年班的同學，誰也沒有能夠當場作出回答。這個問題據說是由大物理學家狄拉克提出的，許多人嘗試做過，包括狄拉克本人在內都沒有找到很簡便的解法。



事實上，中學學過的遞迴數列可以很好的處理這道問題：

有五隻猴子，分一堆桃子，可是怎麼也平分不了。於是大家同意先去睡覺，明天再說。夜裡一隻猴子偷偷起來，把一個桃子吃了，剩下剛好可以分成五等份，它就把自己的一份藏起來，又睡覺去了。第二隻猴子爬起來也吃了一個桃子，剩下剛好可分成五等份，也把自己那一份收起來了。第三、第四、第五隻猴子都是這樣，吃了一個也剛好可以分成五等份，也把自己那一份收起來了。

如果一開始有 a_0 個桃子，那麼最後剩多少個桃子呢？

為了便於大家記憶，有人把它編成了順口溜：

一堆毛桃五猴分，分來分去分不均。

於是約定先睡覺，醒來以後再討論。
大猴乖巧施心計，不佔便宜不甘心。
跑來偷偷吃一個，剩餘剛能五等份。
拿走自己應得數，走時喜得走不穩；
二猴醒後也跑來，先吃一個過過癮。
剩餘也能被五除，堂而皇之拿一份。
其餘幾猴均如此，個個猴兒都不蠢。
毛桃至少是多少？看你算清算不清！

設原有桃子有 a_0 個，第一隻猴子扔掉與取走之後剩 a_1 個，第二隻猴子扔掉與取走之後剩 a_2 個， \dots ，第五隻猴子扔掉與取走之後剩 a_5 個。根據題意

$$a_1 = \frac{4}{5}(a_0 - 1)$$

$$a_2 = \frac{4}{5}(a_1 - 1)$$

$$a_3 = \frac{4}{5}(a_2 - 1)$$

$$a_4 = \frac{4}{5}(a_3 - 1)$$

$$a_5 = \frac{4}{5}(a_4 - 1).$$

從這些式子可以發現數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足如下的遞迴關係：

$$a_{n+1} = \frac{4}{5}(a_n - 1).$$

將這遞迴關係整理為

$$(a_{n+1} + 4) = \frac{4}{5}(a_n + 4).$$

所以數列 $\langle a_n + 4 \rangle$ 是首項 $a_0 + 4$ ，公比 $\frac{4}{5}$ 的等比數列。因此第五項為

$$a_5 + 4 = (a_0 + 4) \left(\frac{4}{5} \right)^5,$$

即最後剩

$$(a_0 + 4) \left(\frac{4}{5} \right)^5 - 4$$

個桃子。

從這公式不難看出， $a_0 + 4$ 必須是 $5^5 = 3125$ 的倍數，即 a_0 至少為 3121。也就是說，開始時至少有 3121 個桃子。

在更早之前，就有這樣的類似題，最有名的莫過於李白沽酒問題：李白每遇見一位朋友就先到店裡將酒壺裡的酒加倍，然後與朋友飲去 19 升的酒。根據這樣的飲酒規則，在遇到 3 個朋友後剛好飲盡壺中酒，問壺中原有幾升酒？

“五猴分桃”問題最先是由大物理學家狄拉克提出來的，這一貌似簡單的問題曾困擾住了他，經過努力，他只是獲得了相當繁瑣的求解方法。為了獲得簡便的方法，他把問題提供給當時的一些數學家，有意思的是竟然也沒有得到滿意的結果。在後來者的不斷努力下，比較簡捷的方法才逐步湧現。李政道和楊振寧曾榮獲諾貝爾物理學獎，李政道提議在中國成立中科大少年班，他在中科大少年班的開班儀式上對“五猴分桃”問題進行適當演繹，提供給了少年班同學。